MAI 2 – domácí úkol ze cvičení 7 – určitý integrál

Příklady k promyšlení (jako příprava na příští cvičení) a pokud chcete, tak i něco třeba sepište jako domácí úkol.

Výpočet R- integrálu integrací per partes nebo pomocí substituce:

1. $\int_{-1}^{1} \arcsin^2(x)\,dx$; 2. $\int_{2}^{3} \frac{1}{x^2}\ln(\frac{1}{x})\,dx$; 3. $\int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx$; 4. $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{1+3\cos^2(x)}\,dx$.

Užití věty o substituci a vlastností R- integrálu:

Ukažte, že platí :

1. je-li $f \in R(-a,a)$, $a>0$, f je funkce lichá, pak $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$;
2. je-li $f \in R(-a,a)$, $a>0$, f je funkce sudá , pak $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$;
3. Je-li f spojitá a sudá v intervalu $[-a,a]$ ($a>0$) , pak $\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Bez výpočtu integrálu ukažte, že

a) $\int_{-1}^{2} (e^x - e^{-x})\,dx > 0$; b) $\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{\log x}{x}\,dx = 0$, ($a>0$) .

A několik příkladů aplikace určitého integrálu:

1. a) Spočítejte obsah omezené rovinné oblasti ω, je-li ω ohraničená grafy funkcí $y = x^2$, $y = x\sin x$ a přímkou $x = \frac{\pi}{2}$.

   b) Spočítejte obsah elipsy $\left\{ [x,y]\,;\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1 \text{ , a} > 0, \text{b} > 0 \right\}$.

2. a) Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ω kolem osy x, kde

$$\omega = \left\{ [x,y]\,;\, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \cos x \right\} .$$

   b) Vypočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací omezené rovinné oblasti ω kolem osy x, kde oblast ω je ohraničená grafy funkcí $y = x\,e^x$ a $y = x$ a přímkou $x = 1$.

3. a) Určete délku grafu funkce $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $0 \le x \le a$.

   b) Určete délku grafu funkce $f(x) = \log(\cos x)$, $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

   („tahák“ : $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$, $x \in R$) ;

   c) Určete délku grafu funkce $f(x) = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$.